ENGINIUS
Formation & Recrutement

CONCOURS ENGINIUS 2021

Épreuve de MATHÉMATIQUES

Informations sur le sujet

Durée de l'épreuve :	**1h30**	
Épreuve notée sur :	**20**	
Document(s) autorisé(s) :	☐ **oui**	☒ **non**
Calculatrice autorisée :	☐ **oui**	☒ **non**

Merci de ne rien inscrire sur le sujet.
Choisir la ou (les) bonne(s) réponse(s) pour chaque question proposée.
Les réponses sont à inscrire sur la grille fournie. Seule cette grille sera corrigée.
Le sujet comporte 9 pages.

PARTIE I

Dans toute cette partie, le corps de base est celui des nombres réels ; on désigne par $E(x)$ la partie entière du nombre réel x et par n un entier naturel.

Question 1. Soit un polynôme de degré n à une indéterminée à coefficients entiers de la forme $a_n x^n + \ldots + a_0$ avec $a_0 \neq 0$, admettant une racine rationnelle $\dfrac{p}{q}$ où $p, q \in \mathbb{Z}^*$, p et q étant premiers entre eux ou étrangers. On a alors :
Réponse **A** : p divise a_n et q divise a_0
Réponse **B** : p et q divisent a_0
Réponse **C** : p divise a_0 et q divise a_n car q divise $a_n p^n$
Réponse **D** : p divise a_0 mais pq ne divise pas $a_n a_0$.

Question 2. Soit f la fonction polynôme définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x - 1$.
Réponse **A** : f admet au moins deux racines réelles car sa dérivée s'annule en deux points
Réponse **B** : f admet une racine rationnelle et deux racines complexes conjuguées
Réponse **C** : f ne possède aucune racine réelle
Réponse **D** : f admet deux racines complexes conjuguées et une racine réelle dans l'intervalle $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

Question 3. Soit x un réel quelconque, on peut écrire $\cos(nx)$ sous la forme $P_n(\cos x)$ où P_n est un polynôme à une indéterminée
Réponse **A** : de degré $n+1$ à coefficients entiers relatifs
Réponse **B** : de degré n à coefficients réels non entiers
Réponse **C** : de degré n à coefficients entiers relatifs
Réponse **D** : unique, car l'application "$x \mapsto \cos(x)$" est surjective de $\mathbb{R}$ sur $[-1, 1]$.

Question 4. Le polynôme P_n défini dans la question 3 s'écrit pour $n \in \{0, 1\}$ comme
Réponse **A** : $P_0(X) = X$
Réponse **B** : $P_0(X) = \dfrac{1}{2}$
Réponse **C** : $P_1(X) = 2X^2 - 1$
Réponse **D** : $P_1(X) = X$.

Question 5. Pour tous réels a, b, on a
Réponse **A** : $\cos a \cos b = 2\left(\cos(a+b) - \cos(a-b)\right)$
Réponse **B** : $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$
Et pour tout entier n strictement positif, la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie dans la question 3 vérifie
Réponse **C** : $P_{n+1}(X) - P_{n-1}(X) = 2XP_n(X)$
Réponse **D** : $P_{n+1}(X) + P_{n-1}(X) = XP_n(X)$.

Question 6. Cette suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est telle que
Réponse **A** : $P_n(X) = X^n - \binom{n}{2} X^{n-2}(1 - X^2) + \ldots + (-1)^k \binom{n}{2k} X^{n-2k}(1 - X^2)^k + \ldots$
Et la fonction $x \mapsto P_n(x)$ est impaire si n est pair
Réponse **B** : Le coefficient de X^n est, pour tout entier n non nul,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{2k} \ldots = 2^{n-1}$$

Réponse **C** : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(-1) = (-1)^{n-1}$
Réponse **D** : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(0) = (-1)^n$.

Question 7. Pour tout entier n strictement positif, les racines x_k de ce polynôme P_n sont :
Réponse **A** : $\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}$ où k est un entier tel que $0 \leq k \leq n-1$

Réponse **B** : $\dfrac{\pi}{2n}+\dfrac{2k\pi}{n}$ où k est un entier tel que $0\leq k\leq n-1$
Réponse **C** : des réels n'appartenant pas à l'intervalle $[-1,1]$
Réponse **D** : les n réels de l'intervalle $]-1,1[$ définis par $x_k=\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}+\dfrac{k\pi}{n}\right)$ où k est un entier tel que $0\leq k\leq n-1$.

On considre l'équation différentielle, pour $n\in\mathbb{N}$, $(E_n)\ :\ y''+n^2y=0$

Question 8. La suite de fonctions (f_n) avec f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=\cos(nx)$
Réponse **A** : forme une base de l'espace vectoriel engendré par les solutions des (E_n)
Réponse **B** : est une solution de (E_n) pour tout $n\in\mathbb{N}$
Réponse **C** : vérifie l'équation (E_n) uniquement pour $n\in\mathbb{N}^*$
Réponse **D** : vérifie l'équation différentielle $y''-n^2y=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Question 9. Si on pose $X=\cos x$, on obtient pour y fonction de x
Réponse **A** : $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-X\dfrac{dy}{dx}$
Réponse **B** : $\dfrac{d^2y}{dx^2}=(1-X^2)\dfrac{d^2y}{dX^2}-X\dfrac{dy}{dX}$
Et l'équation (E_n) est transformée en l'équation $(E_n^{'})$ de la forme
Réponse **C** : $(1+X^2)\dfrac{d^2y}{dX^2}-X\dfrac{dy}{dX}+n^2y=0$
Réponse **D** : $(1-X^2)\dfrac{d^2y}{dX^2}-X\dfrac{dy}{dX}+n^2y=0$.

Question 10. Pour tout entier naturel n, la fonction polynôme P_n définie à la question 3
Réponse **A** : est solution de (E_n)
Réponse **B** : est solution de $(E_n^{'})$ car $(1+x^2)P_n''(x)-xP_n'(x)+n^2P_n(x)=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$
Réponse **C** : ne vérifie ni (E_n) ni $(E_n^{'})$
Réponse **D** : vérifie $(E_n^{'})$ et pour tout $x\in[-1,1]$, $(1+x^2)P_n''(x)-xP_n'(x)+n^2P_n(x)=0$.

PARTIE II

On désignera par E l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients réels et par F le sous-espace vectoriel des polynômes de E de degré inférieur ou égal à 3. On considère l'application f qui à tout élément P de E associe le polynôme $f(P)$ défini par $f(P)(X)=P(X)-P(X-1)$ et on note f_F la restriction de f à F.

Question 11. Le sous-espace vectoriel F
Réponse **A** : est de dimension 3
Réponse **B** : est de dimension 4
Réponse **C** : f est une application linéaire de E dans F
Réponse **D** : f_F est un endomorphisme de F.

Question 12. La matrice M de l'application f_F par rapport aux bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée de cette application s'écrit

Réponse **A** : $\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&-3\\0&0&3\end{pmatrix}$

Réponse **B** : $\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\-1&2&0&0\\1&-3&3&0\end{pmatrix}$

Réponse **C** : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Réponse **D** : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Question 13. De manière générale, pour des matrices de type (n, p) (n lignes et p colonnes) à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on dit que
Réponse **A** : deux matrices équivalentes sont semblables
Réponse **B** : deux matrices équivalentes ont même rang
Et lorsque l'on ajoute à la ligne l_i d'une matrice de $M_{p,q}(\mathbb{K})$, la ligne l_j multipliée par $\lambda \in \mathbb{K}$, le rang de cette matrice
Réponse **C** : est inchangé

Réponse **D** : peut être modifié.

Question 14. Le rang de l'application f_F
Réponse **A** : vaut 3 car est égal au nombre de colonnes non nulles de M
Réponse **B** : est nécessairement inférieur ou égal à 3 car l'espace F est de dimension 3
Réponse **C** : vaut 2 car il y a deux colonnes de M linéairement indépendantes
Réponse **D** : vaut 3 car le rang de f_F est inférieur ou égal à 3 et on peut extraire 3 colonnes ou 3 lignes linéairement indépendantes de M.

Question 15. Les sous-espaces vectoriels noyau et image de f_F sont tels que
Réponse **A** : $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(F) - \mathrm{rang}(f_F) = 2$
Réponse **B** : $\mathrm{Ker}(f_F) = \mathbb{R}$
Réponse **C** : la famille de polynômes $(1, X)$ forme une base de $\mathrm{Im}(f_F)$
Réponse **D** : $\mathrm{Im}(f_F)$ est le sous-espace $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

On considère la famille (A_0, A_1, A_2, A_3) des polynômes de F définie par $A_0 = 1$ et pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $f_F(A_i) = iA_{i-1}$ avec 0 racine de A_i.

Question 16. Ces polynômes vérifient
Réponse **A** : $\forall i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $0 \leq deg(A_i) \leq 3$
Réponse **B** : $\forall i \in \{0, 1, 2, 3\}$, A_i est divisible par X
Réponse **C** : $A_2(X) = X(X + 1)$ et $A_3(X) = X(X + 1)(X + 2)$
Réponse **D** : la famille (A_0, A_1, A_2, A_3) forme une base de F.

On note $\mathscr{B}$ la base canonique de F et $\mathscr{A}$ la base de F formée à l'aide des polynômes (A_0, A_1, A_2, A_3) classés par ordre croissant de degré.

Question 17. La matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{A}$ s'écrit

Réponse **A** : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Réponse **B** : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Réponse **C** : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Réponse **D** : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 18. La matrice M' de l'application f_F, lorsque l'on rapporte F à la base $\mathscr{A}$, s'écrit

Réponse **A** : $M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Réponse **B** : $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Réponse **C** : $M' = PMP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Réponse **D** : $M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1}MP.$

Question 19. Soit g l'application définie par $g(X^i) = A_i$ pour tout $i \in \{0, 1, 2, 3\}$,
Réponse **A** : g est un endomorphisme injectif non bijectif de F
Réponse **B** : g est un endomorphisme bijectif de F car g transforme une base de F en une base de F
La matrice G de g par rapport à la base canonique de F vérifie

Réponse **C** : $G = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Réponse **D** : $G = P$.

Question 20. Soient A une matrice complexe de taille (n, n) avec $n \geq 2$, λ une valeur propre de A et m sa multiplicité dans le polynôme caractéristique (noté $P_A(x) = \det(A - xI_n)$).
Réponse **A** : Si $m = 1$, alors le sous-espace propre associé à A est une droite vectorielle
Réponse **B** : La dimension du sous-espace propre associé à A est toujours égale à m
Réponse **C** : La matrice $(A - \lambda I_n)$ est de rang $(n - m)$
Réponse **D** : Si le sous-espace propre de A associé à λ est une droite vectorielle, alors $m = 1$
Réponse **E** : Le sous-espace propre de A associé à λ est inclus dans le sous-espace propre de A^2 associé à λ^2.

Question 21. Soit A une matrice complexe de taille (n, n) avec $n \geq 2$.

Réponse **A** : La somme des valeurs propres de A est nulle si et seulement si son déterminant est nul
Réponse **B** : Le produit des valeurs propres de A est égal à son déterminant
Réponse **C** : Les valeurs propres de A et celles de sa transposée sont les mêmes
Réponse **D** : Les sous-espaces propres de A et ceux de sa transposée sont les mêmes
Réponse **E** : Les sous-espaces propres de A et ceux de A^2 sont les mêmes.

Question 22. Soient f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (avec $n \geq 2$), P_f son polynôme caractéristique et π_f son polynôme minimal.
Réponse **A** : Si f est diagonalisable, alors toutes les racines de π_f sont simples
Réponse **B** : Si toutes les racines de P_f sont simples, alors f est diagonalisable
Réponse **C** : Si $P_f = (-1)^n \pi_f$, alors f n'est pas diagonalisable
Réponse **D** : Le degré de π_f est toujours strictement inférieur au degré de P_f
Réponse **E** : Si P_f a racines distinctes, alors $P_f = (-1)^n \pi_f$.

Question 23. Soient f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (avec $n \geq 2$), P_f son polynôme caractéristique et π_f son polynôme minimal.
Réponse **A** : Si $\pi_f(X) = X^2 - X$, alors f est nilpotent
Réponse **B** : Si $\pi_f(X) = X^2 - 1$, alors f est une symétrie
Réponse **C** : Si f est une projection alors $\pi_f(X) = X^2$
Réponse **D** : Si $\pi_f(X) = X^2$ alors f n'est pas diagonalisable
Réponse **E** : Si $\pi_f(X) = X^2 - X$ alors f n'est pas diagonalisable.

Question 24. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Réponse **A** : La matrice A est diagonalisable
Réponse **B** : La matrice A a deux valeurs propres distinctes
Réponse **C** : La polynôme minimal de A est $\mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2$
Réponse **D** : Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est de dimension 2
Réponse **E** : Il existe une matrice symétrique semblable à la matrice A.

Question 25. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Réponse **A** : La matrice A a trois valeurs propres distinctes
Réponse **B** : Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 2
Réponse **C** : La matrice A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Réponse **D** : La matrice A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Réponse **E** : Le polynôme minimal de la matrice A est de degré 3.

PARTIE III

Soit g une fonction continue sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}$ pour $x \in [0, +\infty[$.

Question 26. La suite $(f_n)_n$ converge

Réponse **A** : uniformément sur $[0, +\infty[$
Réponse **B** : uniformément sur $[0, 1]$ et la fonction limite f est continue sur $[0, 1]$
Réponse **C** : uniformément sur $[0, +\infty[$ et la fonction limite f est continue sur $[0, +\infty[$
Réponse **D** : uniformément sur tout compact de $]0, +\infty[$.

Question 27. Soit $v_n = \int\limits_0^1 f_n(x)dx$. La suite
Réponse **A** : (v_n) converge car elle est décroissante et minorée
Réponse **B** : (v_n) converge car $0 \leq v_n \leq \dfrac{1-e^{-n}}{n}$
Réponse **C** : (v_n) converge car elle est croissante et majorée
Réponse **D** : (v_n) converge car $0 \leq v_n \leq \dfrac{1}{1+x}$.

Question 28. Soit $w_n = \int\limits_0^1 nx^n g(x)dx$. La suite
Réponse **A** : (w_n) converge vers 1
Réponse **B** : (w_n) converge si g est un polynôme
Réponse **C** : (w_n) converge vers $+\infty$ si g est positive
Réponse **D** : (w_n) converge si et seulement si g est dérivable.

Question 29. Le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n-1)!} x^n$ vaut
Réponse **A** : $R = 1$
Réponse **B** : $R = +\infty$
Réponse **C** : $R = 0$
Réponse **D** : $R = \mathrm{e}^2$.

Question 30. Soit $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$, alors
Réponse **A** : $R = 1$ et $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$
Réponse **B** : $R = +\infty$ et $S(x) = -\dfrac{1}{1-x}$
Réponse **C** : $R = 1$ et $S(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$
Réponse **D** : $R = 1$ et $S(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Question 31. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit u_n un réel strictement positif, on peut dire que si la série
Réponse **A** : $\sum \cos(u_n)$ converge, alors la série $\sum \sin(u_n)$ converge
Réponse **B** : $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum (\cos(u_n) - 1)$ diverge
Réponse **C** : $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum \left(\dfrac{u_n}{n}\right)$ diverge
Réponse **D** : $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum \tan(u_n)$ diverge
Réponse **E** : aucune de ces quatre réponses n'est juste.

Question 32. Soient r et α deux réels strictement positifs.
Réponse **A** : Si $r \leq 1$, alors la série $\sum r^n$ converge
Réponse **B** : Si $r < 1$, alors la série $\sum n^\alpha r^n$ converge
Réponse **C** : Si $r < 1$ et si $\alpha \leq 1$, alors la série $\sum n^\alpha r^n$ converge
Réponse **D** : Si $r < 1$ et si $\alpha > 1$, alors la série $\sum n^\alpha r^n$ converge.

Question 33. Soit $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n+1} x^n$, alors
Réponse **A** : $S(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{x}$

Réponse **B** : $S(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln(1-x)}{x}$
Réponse **C** : $S(x) = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$
Réponse **D** : $S(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$.

Question 34. Soit $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n}{n+1} x^n$, alors
Réponse **A** : $S(x) = \dfrac{-x - \ln(1-x) + x\ln(1-x)}{x(1-x)}$
Réponse **B** : $S(x) = \dfrac{x + \ln(1-x) - x\ln(1-x)}{x(1-x)}$
Réponse **C** : $S(x) = \dfrac{\ln(1-x) + x\ln(1-x)}{x(1-x)}$
Réponse **D** : $S(x) = \dfrac{\ln(1-x) + x\ln(1-x)}{(1-x)}$.

PARTIE IV

On considère une suite de polynômes (B_n) à coefficients réels vérifiant

$$B_0 = 1, \quad \forall n \geq 1, \quad B_n' = nB_{n-1} \quad \text{et} \quad \int_0^1 B_n(t)dt = 0$$

Question 35. On peut affirmer que
Réponse **A** : chaque B_n avec $(n \geq 1)$, est défini à une constante positive près
Réponse **B** : la suite $(B_n)_n$ est bien définie et, de façon unique
Réponse **C** : $B_5 = X^5 - \dfrac{5}{2}X^4 + \dfrac{5}{3}X^3 - \dfrac{1}{6}X$
Réponse **D** : chaque B_n est de degré n et a pour coefficient dominant $n!$.

Pour tout entier naturel n, on note $C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$

Question 36. Quelles assertions parmi les suivantes sont vraies ?
Réponse **A** : $C_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1}'(X) = (-1)^{n+1}(n+1)B_n(1-X)$ et $\int_0^1 C_n(t)dt = (-1)^n \int_0^1 B_n(t)dt$
Réponse **B** : $C_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, C_n'(X) = (-1)^n nB_n(1-X)$ et $\int_0^1 C_n(t)dt = (-1)^{n+1} \int_0^1 B_n(t)dt$
Réponse **C** : $C_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, C_n'(X) = (-1)^n nB_n(1-X)$ et $\int_0^1 C_n(t)dt = (-1)^n \int_0^1 B_n(t)dt$
Réponse **D** : par unicité de la suite $(B_n)_n$, $\forall n \in \mathbb{N}, B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$.

Les nombres de Bernoulli sont les termes de la suite $(B_n(0))$.
On notera pour tout entier naturel n, $b_n = B_n(0)$

Question 37. Quelles assertions parmi les suivantes sont vraies ?
Réponse **A** : Si f est une fonction continue sur $[0,1]$, alors $\int_0^1 \left(f\left(\frac{t}{2}\right) + f\left(\frac{t+1}{2}\right)\right) dt = \int_0^1 f(t)dt$
Réponse **B** : En s'inspirant de la question précédente, on peut montrer que

$$B_n(X) = 2^{n+1}\left(B_n\left(\tfrac{X}{2}\right) + B_n\left(\tfrac{X+1}{2}\right)\right)$$

Réponse **C** : $\forall n \geq 2, b_n = B_n(1)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_{2n+1} = B_{2n+1}(1) = B_{2n+1}(\frac{1}{2}) = 0$
Réponse **D** : $\forall n \geq 2, b_n = B_n(1)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_{2n} = B_{2n}(1) = B_{2n}(\frac{1}{2})$.

PARTIE V

Question 38. La décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ de $F(p) = \dfrac{2}{p(p^2-4)}$ s'écrit

Réponse **A** : $F(p) = \dfrac{-1}{4p} + \dfrac{1}{4(p^2-4)}$

Réponse **B** : $F(p) = \dfrac{-1}{p} - \dfrac{1}{(p^2-4)}$

Réponse **C** : $F(p) = \dfrac{-4}{p} + \dfrac{4p}{(p^2-4)}$

Réponse **D** : $F(p) = -\dfrac{1}{2p} + \dfrac{1}{4(p+2)} - \dfrac{1}{4(p-2)}$.

Question 39. La décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ de $F(p) = \dfrac{4}{(p+2)(p^2-4)}$ s'écrit

Réponse **A** : $F(p) = \dfrac{-1}{4p} + \dfrac{1}{4(p^2+4)}$

Réponse **B** : $F(p) = \dfrac{-1}{p} - \dfrac{1}{(p^2+4)}$

Réponse **C** : $F(p) = \dfrac{-4}{p} + \dfrac{4p}{(p^2+4)}$

Réponse **D** : $F(p) = \dfrac{1}{4(p-2)} - \dfrac{1}{(p+2)^2} - \dfrac{1}{4(p+2)}$.

Question 40. Notons U la fonction échelon unité ou échelon d'Heaviside. La transformée de Laplace inverse de $p \mapsto F(p) = \dfrac{-1}{p(p^2+4)}$ est

Réponse **A** : $y(t) = -\dfrac{1}{2}\sin^2(t)U(t)$

Réponse **B** : $y(t) = -\dfrac{1}{2}(t + \cos(t))U(t)$

Réponse **C** : $y(t) = \dfrac{1}{2}(1 - \cos(t))U(t)$

Réponse **D** : $y(t) = -\dfrac{1}{2}(1 - \sin(t))U(t)$.